

دراسة استقرارية التباينات المشروطة لنماذج GARCH مع تطبيق

أزهر عباس محمد ، ميادة خليل غفار

قسم الرياضيات ، كلية التربية للعلوم الصرفة ، جامعة تكريت ، تكريت ، العراق

الملخص

تم في هذا البحث دراسة شروط استقرارية نماذج GARCH وإيجاد هذه الشروط باستخدام تقنية التقريب بالخطية المحلية ، إضافة الى دراسة استقرارية تنبؤات التباينات المشروطة لهذه النماذج حيث ان هذه التنبؤات تقترب من التباين غير المشروط بعد عدد محدود من خطوات التنبؤ. تم تطبيق هذه الدراسة على المتسلسلة الزمنية التي تمثل المعدلات الشهرية لدرجات الحرارة في مدينة الموصل للسنوات 1978-2011 ووجنا ان افضل نموذج ملائم يصلح للتنبؤ هو نموذج ARCH(1).

1- المقدمة

لذلك فإن $E(X_t X_s) = 0$ لكل $s < t$. ان عدم ثبات التباين (اعتماده على الزمن t) هي صفة تسمى بعدم تجانس التباين المشروط حيث

$$E(X_t^2 / \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t^2$$

ان النموذج ARCH المقدم من قبل Engle. R يحدد العلاقة بين σ_t و Z_t بالشكل

$$X_t = \sigma_t Z_t \quad \dots (1.1)$$

حيث ان $\{\sigma_t\}$ و $\{Z_t\}$ عمليتان تصادفتان بحيث ان

- i. σ_t قابلة للقياس بالنسبة للمرشح \mathcal{F}_{t-1}
- ii. $\{Z_t\}$ عملية تصادفية مستقلة ومتماثلة التوزيع بتوقع صفري
- iii. وتباين مقداره واحد اي $Z_t \sim \text{iid } N(0,1)$ و $\sigma_t > 0$

ويسمى σ_t بتطايير X_t (volatility of X_t). تحت هذه الشروط يكون

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E(\sigma_t Z_t) = E(\sigma_t)E(Z_t) = 0 \\ &= E(Z_t) \cdot E(\sigma_t Z_{t-k}) = 0 \quad \forall k > 0 \end{aligned}$$

وهذا ما يجعل $\{X_t\}$ عملية تشويش ابيض ضعيف (weak white noise).

ومن جهة اخرى فإن دالة التباين الذاتي (Autocovariance function) لمتسلسلة المربعات $\{X_t^2\}$ غير صفرية وبهذا فإن $\{X_t\}$

لا تمثل عملية تشويش ابيض قوية (strong white noise).

ولمعالجة مشكلة التطايير (volatility) فإن العالم R. Engle وضع الصيغة القياسية لنماذج ARCH المتعددة الاشكال حيث $s < t$; $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma(X_s)$ هو حقل σ متولد من ماضي العملية التصادفية $\{X_t\}$ وان التطايير هنا دالة حتمية لماضي المتسلسلة $\{X_t\}$. ونموذج ARCH القياسي يمثل مربع التطايير او التباين المشروط كدالة خطية لماضي المتسلسلة $\{X_t^2\}$.

وفي عام 1986 قدم الباحث Bollersley نموذج الانحدار الذاتي المشروط بعدم تجانس التباين العام والمعروف اختصاراً بـ GARCH بعد اضافة حدود تمثل ماضي متسلسلة التباينات المشروطة $\{\sigma_t^2\}$ و [1] و [2]

تعد المتسلسلات الزمنية من الاساليب الناجحة التي تستخدم في وصف وتحليل الظواهر والتنبؤ بمستقبل هذه الظواهر بالاعتماد على البيانات تمثل تاريخ تلك الظواهر وهناك العديد من نماذج المتسلسلات الزمنية واشهرها هي نماذج الانحدار الذاتي او الاوساط المتحركة المندمج وهي ما يطلق عليها اختصاراً ARIMA و هنالك نماذج خطية عديدة . يجب ان تتوفر عدة شروط في هذه النماذج لكي يكون معبرة عن الظاهرة التي تمثلها ومن اهم هذه الشروط هي الشروط الخاصة بالخطأ العشوائي والذي تمثل بعملية تصادفية يطلق عليها عملية التشويش الابيض (white noise process) وهذه الشروط هي ان تكون القيمة المتوقعة مساوية للصفر وثبات التباين وعدم الارتباط بين المتغيرات العشوائية التي تمثل عملية التشويش الابيض ، وبعبارة اخرى فإن العملية التصادفية $\{X_t\}$ تسمى بعملية التشويش ابيض اذا حققت :

- i. $E(X_t) = 0$
- ii. $\text{Var}(X_t) = \sigma_x^2$ (σ_x^2 ثابت)
- iii. $E(X_t X_s) = 0$, $t \neq s$

في الجانب التطبيقي يصعب تحقيق الشرطين (ii),(iii) لذلك تم التفكير بإيجاد نموذج يعالج هذه المشكلة من قبل الباحث R. Engle حيث قدم عام 1982 نموذج سمي بنموذج الانحدار الذاتي المشروط بعدم تجانس التباين (Autoregressive Conditional Heteroscedastic Model) والذي يعرف اختصاراً بـ ARCH والذي يعتمد اساساً على متسلسلة فرق المارتكل لـ X_t (Martingale difference series) التي تعرف بالتوقع المشروط للعزمين الاول والثاني بمعلومية حشد غير متناقص من حقول σ (σ - field) اي

$$\dots \subset \mathcal{F}_{t-1} \subset \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots$$

حيث $\mathcal{F}_t = \sigma(X_t, X_{t-1}, \dots, X_0)$ يمثل حقل σ ويطلق عليه مرشح (Filter) ومتسلسلة مارتكل المتعلقة بهذا الترشيح هي عملية تصادفية $\{X_t\}$ بحيث ان المتغير العشوائي X_t قابل للقياس بالنسبة للمرشح \mathcal{F}_t (\mathcal{F}_t - measurable) وان $E(X_t / \mathcal{F}_{t-1}) = 0$ وهذا يعني ان X_t يكون عمودياً على كل المتغيرات العشوائية التي تنتمي للمرشح \mathcal{F}_{t-1} اي يشمل كل المتغيرات العشوائية X_t بحيث ان $s < t$ لكل $X_s \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_{t-1} \subset \mathcal{F}_t$

ان المعادلة (2.1.5) تمثل عملية ARMA للمتسلسلة الزمنية $\{X_t^2\}$ و المتسلسلة $\{W_t\}$ تمثل التشويش الابيض للعملية وبالتالي فإن W_t متعامد مع \mathcal{F}_{t-1} اي $E(W_t / \mathcal{F}_{t-1}) = 0$ وتكون $\{W_t\}$ هي متسلسلة فرق مارتنكل وهو متتابعة من التشويش الابيض اذا كان العزم الثاني له موجود ولا يعتمد على t وان اهمية المعادلة (2.1.5) تكمن في امكانية احتساب الدلتا المتغيرات والارتباط الذاتي لـ $\{X_t^2\}$. [2] ان التباين غير مشروط (unconditional variance) للنموذج ARCH (q, p) يمكن ايجاده بسهولة حيث $X_t = \sigma_t Z_t$ و iid $(X_t) = E(\sigma_t Z_t) = 0$ وان $Z_t \sim N(0,1)$ $Var(X_t) = E(X_t^2) = E(\sigma_t^2 Z_t^2) = E(\sigma_t^2) E(Z_t^2) = 0$ وان $E(\sigma_t^2) \cdot E(Z_t^2) = E(\sigma_t^2)$ $= \alpha_0 + E(\sigma_t^2) = E(\alpha_0 + \alpha(B)X_t^2 + \beta(B)\sigma_t^2)$ لذا $E(X_t^2) = E(\sigma_t^2)$ لكن $\alpha(B)E(X_t^2) + \beta(B)E(\sigma_t^2)$ فإن

$$Var(X_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha(1) - \beta(1)}$$

$$\sigma_t^2 = \frac{\alpha_0}{1 - (\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i)} \dots (2.1.6)$$

ويكون التباين غير المشروط موجود اذا كانت $\alpha_0 > 0$ و $\alpha_0 < 1$ $Cov(X_t, X_s) = E(X_t X_s) - E(X_t)E(X_s) = E(X_t Cov(X_t, X_s)) = E(\sigma_t Z_t \cdot \sigma_s Z_s) = E(\sigma_t \sigma_s Z_t Z_s) = 0$ وعلى فرض ان العزم الرابع $E(X_t^4)$ يكون منتهياً في نموذج ARCH(1) معطى بالشكل

$$E(X_t^4 / \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2$$

$$E(X_t^4 / \mathcal{F}_{t-1}) = 3[E(X_t^2 / \mathcal{F}_{t-1})]^2 = 3(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2)^2$$

$$\therefore E(X_t^4) = E(E(X_t^4 / \mathcal{F}_{t-1})) = E[3(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2)^2]$$

$$= 3E[\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 X_{t-1}^2 + \alpha_1^2 X_{t-1}^4]$$

$$E(X_t^4) = 3[\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 var(X_{t-1}) + \alpha_1^2 E(X_{t-1}^4)]$$

$$E(X_t^4) = 3\alpha_0^2 \left(1 + 2\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\right) + 3\alpha_1^2 m_4$$

وينتج ان

$$E(X_t^4) = \frac{3\alpha_0^2(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)}$$

وهذه النتيجة تعكس خاصيتان مهمتان وهما

(a) بما ان العزم الرابع لـ X_t فإن $1 - 3\alpha_1^2 > 0$ وبالتالي فإن $\frac{1}{3} < \alpha_1^2 < 1$

(b) معامل التقلطح الغير مشروط لـ X_t يكون

$$\kappa = \frac{E(X_t^4)}{[var(X_t)]^2} = 3 \frac{\alpha_0^2(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)} \cdot \frac{(1-\alpha_1)^2}{\alpha_0^2} = 3 \left[\frac{1+\alpha_1}{1-3\alpha_1^2} \right] > 3$$

[3] و [5]

حيث κ هو معامل تفلطح و باعتبار ان قيمة معامل التفلطح اكبر من 3 فان التوزيع الطبيعي سوف يكون اقل في ذبلي التوزيع ويسمى التوزيع واسع الشفاه (Leptokurtic) لان نهايتي التوزيع تكون اثن من التوزيع الطبيعي.

2- عملية الانحدار الذاتي المشروط بعدم تجانس التباينات العامة

GARCH(q, p)
General Conditional Heteroscedastic Autoregressive Process

2-1 : نماذج ARCH(q) و GARCH(q, p)

يعتمد صياغة عملية GARCH على متتابعة فرق مارتنكل $\{X_t\}$ بالنسبة للترشيح \mathcal{F}_t مع التباين المشروط $E(X_t^2 / \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t^2$ وان $X_t = \sigma_t Z_t$ حيث $\{Z_t\}$ تمثل متتابعة الاخطاء العشوائية القياسية $Z_t \sim iid N(0,1)$

تعريف 2-1 : [1] و [3] و [4]

تعرف عملية GARCH(q, p) بأنها متتابعة فرق المارتنكل $\{X_t\}$ بحيث ان

$$X_t = \sigma_t Z_t, \quad \forall t \in Z$$

$$\dots + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_p \sigma_{t-p}^2 \dots (2.1.1)$$

$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \alpha_q X_{t-q}^2$
 $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$ $X_t = \sigma_t Z_t$ او
حيث $\beta_p, \dots, \beta_1, \alpha_q, \dots, \alpha_1, \alpha_0$ ثوابت غير سالبة و $Z_t \sim iid N(0,1)$

وباستخدام مؤثر الازاحة الخلفية (feedback shift operator)

$$\beta(B)\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha(B)X_t^2 \dots (2.1.2)$$

حيث $\beta(B) = 1 - \beta_1 B - \beta_2 B^2 - \dots - \beta_p B^p$, $\alpha(B) = \alpha_1 B + \dots + \alpha_q B^q$

متعددات حدود من المراتب p و q على التوالي وان σ_t^2 يمثل التباين المشروط واذا كانت المعاملات β_1, \dots, β_p مساوية للصفر جميعاً فإن النموذج (2.1.1) يطلق عليه نموذج انحدار ذاتي غير متجانس التباين من المرتبة q, ARCH(q) وفي هذه الحالة يكون التباين المشروط عبارة عن دالة خطية بمربعات المتسلسلة $\{X_t\}$ اي $X_t = \sigma_t Z_t$ $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q X_{t-q}^2 \dots (2.1.3)$

ان نماذج GARCH و ARCH تستخدم تباينات الماضي المشروط في تفسير تباينات الحاضر والتنبؤ بتباينات المستقبل ومفهوم استقراريه النموذج هنا يقترن باستقراريه تنبؤات التباين وعبارة اخرى ان تنبؤات التباينات المشروطة σ_t^2 تقترب من التباين غير المشروط (ثابت).

ولغرض فهم خواص النموذج من المفيد بيان العلاقة بنماذج ARMA الخطية. ان خطأ التنبؤ للتباينات المشروطة يمكن تعريفه كمتغير عشوائي W_t حيث $W_t = X_t^2 - E(X_t^2 / \mathcal{F}_{t-1}) = X_t^2 - \sigma_t^2$ $\dots (2.1.4)$

وبالتالي فإن $\sigma_t^2 = X_t^2 - W_t$ ويتعويض σ_{t-j}^2 لكل $j=0,1,\dots,p$ في المعادلة (2.1.1) واعادة ترتيبها نحصل على

$$X_t^2 = \alpha_0 + (\beta_1 + \alpha_1) X_{t-1}^2 + \dots + (\beta_r + \alpha_r) X_{t-r}^2 + W_t - \beta_1 W_{t-1} - \beta_2 W_{t-2} - \dots - \beta_p W_{t-p} \dots (2.1.5)$$

حيث $\beta_j = 0$ $i > q$ لكل $\alpha_i = 0$ و $r = \max(p, q)$ لكل $j > q$ ويمكن كتابة (2.1.5) بالشكل $(\beta(B) + \alpha(B))X_t^2 = \alpha_0 + \beta(B)W_t$

2-3 شروط استقرار نماذج GARCH(q, p)

في هذه الفقرة سيتم ايجاد شروط استقرار نماذج GARCH (q, p) المعرفة بالمعادلة (2.1.1) باستخدام تقنية التقريب بالخطية المحلية (Local Linearization technique) والمقترحة من قبل العالم Ozaki عام 1985 [7] وهي طريقة ديناميكية قائمة على التقريب الخطي المحلي للنموذج في جوار النقطة المنفردة اللاصفرية للنموذج (non-zero singular point) وهي تمثل النقطة الثابتة للنموذج والتي يمكن ايجادها كما يلي: ليكن لدينا نموذج GARCH(q, p) اي

$$X_t = \sigma_t Z_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \dots (2.3.1)$$

وبأخذ التوقع الشرطي بالنسبة للفانر \mathcal{F}_{t-1} لطرفي النموذج نحصل على

$$E(\alpha_0/\mathcal{F}_{t-1}) + E\left(\frac{\sigma_t^2}{\mathcal{F}_{t-1}}\right) = E\left[E\left(\frac{X_t^2}{\mathcal{F}_{t-1}}\right)\right]$$

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i E(X_{t-i}^2/\mathcal{F}_{t-1}) + \sum_{j=1}^p \beta_j E(\sigma_{t-j}^2/\mathcal{F}_{t-1})$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \dots (2.3.2)$$

حيث $\sigma_{t-i}^2 = E(X_{t-i}^2/\mathcal{F}_{t-1})$ لكل $i=1, \dots, q$ والان لإيجاد النقطة الثابتة ξ للنموذج نضع

$$\sigma_t = \sigma_{t-1} = \sigma_{t-2} = \dots = \sigma_{t-p} = \sigma_{t-q} = \xi$$

$$\xi^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \xi^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \xi^2$$

فان وبالتالي فان

$$\xi^2 = \frac{\alpha_0}{1 - (\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j)} \dots (2.3.3)$$

ونجد هنا ان ξ^2 تمثل التباين غير المشروط للنموذج المذكورين في المعادلة (2.1.6) وان النقطة الثابتة

$$\xi = \sqrt{\frac{\alpha_0}{1 - (\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j)}}$$

تمثل الانحراف المعياري غير المشروط (unconditional S.D) للنموذج.

اما التقريب بالخطية المحلية فيتم بأخذ جوار مفتوح حول النقطة المنفردة غير الصفريّة ξ وينصف قطر كاف ξ_t بحيث ان $0 \rightarrow \xi_t^n$ لكل $n \geq 2$ وبالتعويض عن قيم σ_{t-i}^2 و σ_{t-j}^2 لكل قيم $i=1, \dots, p$ و $j=0, 1, \dots, q$ بالمعادلة البيئية (Variational equation)

$$\sigma_{t-i}^2 = \xi + \xi_{t-i}, \quad \sigma_{t-j}^2 = \xi + \xi_{t-j}$$

فان المعادلة (2.3.2) تصبح

$$(\xi + \xi_t)^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (\xi + \xi_{t-i})^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j (\xi + \xi_{t-j})^2$$

$$\xi^2 + 2\xi\xi_t + \xi_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (\xi^2 + 2\xi\xi_{t-i} + \xi_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^p \beta_j (\xi^2 + 2\xi\xi_{t-j} + \xi_{t-j}^2) \dots (2.3.4)$$

ولكن $\xi_{t-i}^2 \rightarrow 0$ وكذلك $\xi_{t-j}^2 \rightarrow 0$ وبعد اعادة ترتيب حدود المعادلة (2.3.4) نحصل على

$$\xi^2 \left(1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j\right) + 2\xi\xi_t = \alpha_0 + 2\xi \left[\sum_{i=1}^q \alpha_i \xi_{t-i} + \sum_{j=1}^p \beta_j \xi_{t-j}\right]$$

ومن معادلة (2.3.3) وبالتعويض عن ξ^2 نحصل على

2-2 تقدير معاملات نماذج GARCH باستخدام تقدير الامكان الاعظم

تعتبر طريقة الامكان الاعظم M.L.E من الطرق الشائعة في تقدير معاملات النماذج اذا يتم تحديد دالة الامكان الاعظم بالاعتماد على التوزيع الاحتمالي لخطأ النموذج وفي حالة نماذج GARCH فإن الخطأ العشوائي Z_t يتوزع توزيعاً طبيعياً بمعدل صفري وتباين 1، وان X_t يتوزع توزيعاً طبيعياً بمعدل صفري وتباين σ_t^2 ومثال سنناقش تقدير المعلمتين α_0 و α_1 للنموذج GARCH(1,1) حيث ان

$$X_t = \sigma_t Z_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \dots (2.2.1)$$

ولنفترض ان لدينا عينة عشوائية من المشاهدات بحجم n اي X_1, X_2, \dots, X_n والمطلوب ايجاد تخمينات للمعاملات $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1$ وبما ان $X_t/\mathcal{F}_{t-1} \sim N(0, \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2)$ فان دالة الامكان الاعظم تعرف بالشكل

$$L(\alpha_0, \alpha_1) = \prod_{t=1}^n \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{X_t^2}{2\sigma_t^2}\right) \right], \beta_1$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left[\prod_{t=1}^n \frac{1}{\sigma_t} \right] \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{X_t^2}{\sigma_t^2}\right)$$

$$\text{Log } L(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1; X_1, \dots, X_n) = -\frac{n}{2} \text{Log}(2\pi) -$$

$$\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \text{Log} \sigma_t^2 - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{X_t^2}{\sigma_t^2} \dots (2.2.2)$$

باشتقاق العلاقة (2.2.2) جزئياً بالنسبة لـ $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$ على التتابع نحصل على

$$\frac{\partial \text{Log } L(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1; X_1, \dots, X_n)}{\partial \alpha_0} = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{1}{\sigma_t^2} + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{X_t^2}{\sigma_t^4}$$

$$\frac{\partial \text{Log } L(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1; X_1, \dots, X_n)}{\partial \alpha_1} = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{X_{t-1}^2}{\sigma_t^2} + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{X_t^2 X_{t-1}^2}{\sigma_t^4}$$

$$\frac{\partial \text{Log } L(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1; X_1, \dots, X_n)}{\partial \beta_1} = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{\sigma_{t-1}^2}{\sigma_t^2} + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{X_t^2 \sigma_{t-1}^2}{\sigma_t^4}$$

وبمساوات المشتقات الجزئية الثلاثة بالصفر من اجل ايجاد القيمة العظمى لدالة الامكان واستخدام العلاقة (2.2.1) والترتيب نحصل

على المعادلات الثلاث الآتية وبثلاث مجاهيل $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1$

$$\sum_{t=1}^n \frac{1}{(\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 X_{t-1}^2 + \hat{\beta}_1 \sigma_{t-1}^2)} = \sum_{t=1}^n \frac{X_t^2}{(\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 X_{t-1}^2 + \hat{\beta}_1 \sigma_{t-1}^2)^2}$$

$$\sum_{t=1}^n \frac{X_{t-1}^2}{(\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 X_{t-1}^2 + \hat{\beta}_1 \sigma_{t-1}^2)} = \sum_{t=1}^n \frac{X_t^2 X_{t-1}^2}{(\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 X_{t-1}^2 + \hat{\beta}_1 \sigma_{t-1}^2)^2}$$

$$\sum_{t=1}^n \frac{\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 X_{t-2}^2 + \hat{\beta}_1 \sigma_{t-2}^2}{(\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 X_{t-1}^2 + \hat{\beta}_1 \sigma_{t-1}^2)} = \sum_{t=1}^n \frac{X_t^2 (\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 X_{t-2}^2 + \hat{\beta}_1 \sigma_{t-2}^2)}{(\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 X_{t-1}^2 + \hat{\beta}_1 \sigma_{t-1}^2)^2}$$

ان المعادلات الثلاثة السابقة يمكن حلها باستخدام الطرق العددية من اجل $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1$ والتحقق من ان مصفوفة هيسيان (Hessian Matrix) المعروفة بالمشتقات الثانية تكون سالبة حيث

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \text{Log } L}{\partial \alpha_0^2} & \frac{\partial^2 \text{Log } L}{\partial \alpha_0 \partial \alpha_1} & \frac{\partial^2 \text{Log } L}{\partial \alpha_0 \partial \beta_1} \\ \frac{\partial^2 \text{Log } L}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_0} & \frac{\partial^2 \text{Log } L}{\partial \alpha_1^2} & \frac{\partial^2 \text{Log } L}{\partial \alpha_1 \partial \beta_1} \\ \frac{\partial^2 \text{Log } L}{\partial \beta_1 \partial \alpha_0} & \frac{\partial^2 \text{Log } L}{\partial \beta_1 \partial \alpha_1} & \frac{\partial^2 \text{Log } L}{\partial \beta_1^2} \end{bmatrix} [6]$$

لكن $\lambda^r \neq 0$ لذا فإن

$$P\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 1 - \sum_{j=1}^r (\alpha_j + \beta_j) \left(\frac{1}{\lambda}\right)^j = 0$$
 وباستخدام المأخوذة (2.3.1) فإن متعددة الحدود لها جذور تقع خارج دائرة الوحدة إذا كان $P(1) > 0$ أي ان

$$P(1) = 1 - \sum_{j=1}^r (\alpha_j + \beta_j) > 0$$
 والمتباينة الاخيرة تعطي شرط الاستقرار المحادية لنموذج GARCH(r, r) وهو

$$\sum_{j=1}^r (\alpha_j + \beta_j) < 1 \quad \dots (2.3.7)$$

دون اي فقد للعمومية بالنسبة لمرتبة النموذج p و q , فإذا كانت q > p فإن في هذه الحالة نغرض ان

$$0 = \dots = \alpha_p = \alpha_{q+1} = \alpha_{q+1}$$

بالعكس. اي ان شرط الاستقرار المحادية (Asymptotically Stability) للنموذج هو :

$$\left[\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i \right] < 1$$

2.4: استقرارية تنبؤات النموذج GARCH(q, p)

ان علاقة التشابه الموجودة بين نماذج ARMA و GARCH تفرض منهجية واحدة في طريقة التنبؤ لكن دالة التنبؤ المشروط σ_t^2 لنماذج GARCH اقل وثقاً من دالة التنبؤ لنماذج ARMA الخطية [6]. بتحقيق شرط الاستقرار (2.3.5) فإن التباين المشروط σ_t^2 يقترب من التباين الغير المشروط عندما يتم التنبؤ بعدد غير محدود من الخطوات . لنفترض ان لدينا نموذج GARCH(1,1) المعطى بالشكل $X_t = \sigma_t Z_t$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \quad \dots (2.4.1)$$

وليكن الفلتر \mathcal{F}_t هو حقل σ للمتغيرات العشوائية X_0, \dots, X_{t-1} . X_t وهو يمثل دالة لحاضر وماضي المتسلسلة الزمنية $\{X_t\}$. من معادلة (2.4.1) فإن

$$\sigma_{t+2}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t+1}^2 + \beta_1 \sigma_{t+1}^2$$

وبأخذ التوقع المشروط معطى الفلتر \mathcal{F}_t

$$E(\sigma_{t+2}^2 / \mathcal{F}_t) = \alpha_0 + \alpha_1 E(X_{t+1}^2 / \mathcal{F}_t) + \beta_1 E(\sigma_{t+1}^2 / \mathcal{F}_t)$$

$$= \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{t+1}^2 + \beta_1 \sigma_{t+1}^2 ; \quad \sigma_{t+1}^2 = E(X_{t+1}^2 / \mathcal{F}_t)$$

$$\sigma_{t+2}^2$$

$$\sigma_{t+2}^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \sigma_{t+1}^2$$

ويتكرر نفس العملية بالنسبة لـ t+3 فإن

$$\sigma_{t+3}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t+2}^2 + \beta_1 \sigma_{t+2}^2$$

وبأخذ التوقع المشروط معطى الفلتر \mathcal{F}_t فإن

$$\sigma_{t+3}^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \sigma_{t+2}^2$$

$$= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \cdot [\alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \sigma_{t+1}^2]$$

$$= \alpha_0 + \alpha_0 (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_1 + \beta_1)^2 \sigma_{t+1}^2$$

بالاستمرار على هذا المنهج k من المرات فإن

$$\sigma_{t+k}^2 = \alpha_0 + \alpha_0 (\alpha_1 + \beta_1) + \dots + \alpha_0 (\alpha_1 + \beta_1)^{k-2} + (\alpha_1 + \beta_1)^{k-1} \sigma_{t+1}^2$$

وبما أن شرط الاستقرار $(\alpha_1 + \beta_1) < 1$ فإن الحدود الاولى تمثل متسلسلة هندسية متقاربة

$$\alpha_0 + 2\xi \xi_t = \alpha_0 + 2\xi \left[\sum_{i=1}^q \alpha_i \xi_{t-i} + \sum_{j=1}^p \beta_j \xi_{t-j} \right]$$

$$\xi_t = \sum_{i=1}^q \alpha_i \xi_{t-i} + \sum_{j=1}^p \beta_j \xi_{t-j}$$

وعندما $i = j = 1$ فإن المعادلة (2.3.4) تصبح $\xi_t = (\alpha_1 + \beta_1) \xi_{t-1}$

وهي معادلة فرقية (difference equation) من المرتبة الاولى وان النسبة $\frac{\xi_t}{\xi_{t-1}} \rightarrow 0$ اذا فقط اذا كان $(\alpha_1 + \beta_1) < 1$

وهي تمثل شرط استقراره النموذج GARCH(1,1) .

نفرض $r = \max(p, q)$ فإن المعادلة (2.3.4) يمكن كتابتها بالشكل

$$\xi_t = \sum_{j=1}^r (\alpha_j + \beta_j) \xi_{t-j} \quad \dots (2.3.5)$$

وهي معادلة فرقية من المرتبة r والمعادلة المميزة لها

$$\lambda^r - \sum_{j=1}^r (\alpha_j + \beta_j) \lambda^{r-j} = 0 \quad \dots (2.3.6)$$

مأخوذة 2.3.1:

إذا كانت p_1, p_2, \dots, p_r اعداد حقيقية غير سالبة فأن متعددة الحدود $P(Z) = 1 - \sum_{j=1}^r p_j Z^j$ لا تمتلك جذور على قرص الوحدة اذا فقط اذا كان $P(1) > 0$.

البرهان :

لنكن p_1, p_2, \dots, p_r اعداد حقيقية غير سالبة فإن $\sum_{j=1}^r p_j > 0$ وبالتالي فإن $\sum_{j=1}^r p_j < 0$ وبإضافة (1) الى طرفي المتباينة نحصل على $1 - \sum_{j=1}^r p_j < 1$ وهذا يعني ان $P(1) < 1$

ولكن $0 < P(1) < 1$ بالفرض لذا فإن $0 < P(1) < P(0) = 1$ وبهذا يصبح

$$0 < P(1) < P(0)$$

وهذا يعني ان متعددة الحدود لا تمتلك جذور واقعة داخل وعلى قرص الوحدة لأن كل الجذور m الواقعة بين الصفر والواحد لا يحقق متعددة الحدود اي $P(m) = 1$

وبالعكس نفرض ان متعددة الحدود لا تمتلك جذور واقعة داخل قرص الوحدة اي ان $|Z| \geq 1$ هو احد الجذور

وبالتالي فإن $|Z|^j \geq 1$ لكل $j=1, \dots, r$

وبما ان $\sum_{j=1}^r p_j > 0$ فإن $|Z|^j > \sum_{j=1}^r p_j$ اي ان

$$- \sum_{j=1}^r p_j |Z|^j < - \sum_{j=1}^r p_j$$

وبإضافة (1) الى الطرفين ينتج ان

$$P(Z) < P(1) \quad 1 - \sum_{j=1}^r p_j |Z|^j < 1 - \sum_{j=1}^r p_j$$

لكن $P(Z) = 0$ لان Z تمثل احد الجذور

$$\therefore P(1) > 0 .$$

ان المعادلة (2.3.5) مستقرة اذا كانت جميع جذور المعادلة المميزة (2.3.6) واقعة داخل دائرة الوحدة , اي

$$| \lambda_j | < 1 \quad \text{لكل } j=1, 2, \dots, r$$

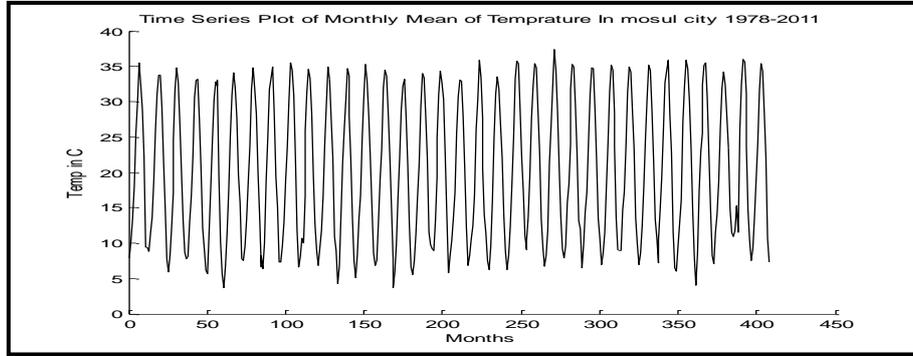
او ان $\left| \frac{1}{\lambda_j} \right| > 1$ لكل $j=1, 2, \dots, r$ اي ان مقلوب الجذور تقع خارج دائرة الوحدة

$$\lambda^r \left[1 - \sum_{j=1}^r (\alpha_j + \beta_j) \lambda^{-j} \right] = 0$$

البواقي واستخدام اختبار Ljung-Box قبل البدء بتخمين معالمات النماذج والتحقق من استقرارية النماذج ومطابقتها بالحصول على اقل معيار لمعلوماتية اكايكي AIC ومعيار BIC، ومن ثم التنبؤ بالتباينات المشروطة. تم وضع برنامج على شكل m-file على نظام Matlab2012a (الملحق 1) وهو برنامج يعطي نتائج جميع الاختبارات والتخمينات والتنبؤات ورسوم الاشكال الواردة في هذه الفقرة.

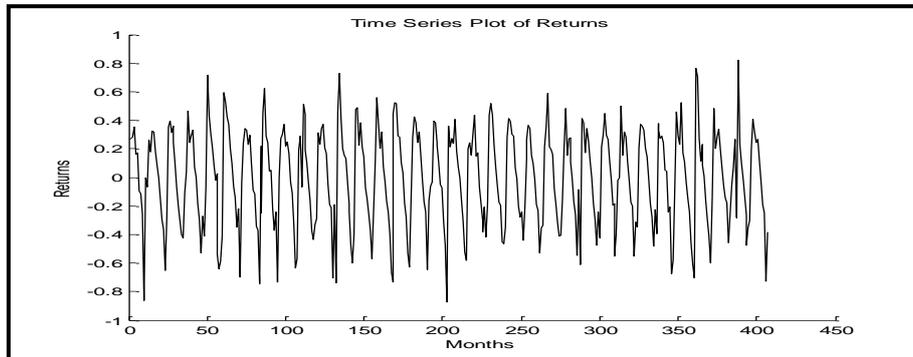
3.1 - وصف البيانات

تمثل البيانات قيد الدراسة المتسلسلة الزمنية للمعدلات الشهرية لدرجات الحرارة في مدينة الموصل للسنوات 1978-2011 وواقع 396 مشاهدة والشكل (3.1.1) يمثل رسم المتسلسلة الزمنية والتي يتضح انها شبه دورية لان المعدلات الشهرية لدرجات الحرارة تتباين حسب الفصول الاربعة.



شكل (3.1.1): رسم المتسلسلة الزمنية للمعدلات الشهرية لدرجات الحرارة في مدينة الموصل للسنوات 1978-2011

الاقتصادية بحيث يحول السعر الى العائد المالي ويعبر عن هذا التحويل بنظام Matlab بالجملة [5] ، [10] ، [11] $X_t = \text{price2ret}(Y)$. والشكل (3.1.2) يمثل رسم متسلسلة العوائد للبيانات.



شكل (3.1.2): رسم المتسلسلة الزمنية لعوائد البيانات .

الجزئي تكون داخل فترة الثقة عند الفرق الزمني 12 وما بعده اما معاملات دالة الارتباط الذاتي فان اغلبها واقع خارج فترة الثقة المحددة بـ $\pm \frac{1.96}{\sqrt{n}}$ حيث n تمثل عدد البيانات [12].

$$= \alpha_0 \left[\frac{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^{k-1}}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)} \right] + (\alpha_1 + \beta_1)^{k-1} \sigma_{t+1}^2, \quad k \geq 2 \dots \quad (2.4.2)$$

وعندما تزداد قيمة k التي تمثل عدد خطوات التنبؤ بغير حد فإن

$$\text{تنبؤات التباين المشروط تقترب من التباين غير مشروط} \quad \sigma_x^2 = \text{Var}(X_t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{t+k}^2 = \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)} \dots \quad (2.4.3)$$

وبشكل عام فإن المعادلة (2.4.2) يمكن تعميمها لنماذج GARCH(q, p) ويصبح

$$\sigma_{t+k}^2 = \alpha_0 \left[\frac{1 - S^{k-1}}{1 - S} \right] + S^{k-1} \sigma_{t+1}^2, \quad k \geq 2$$

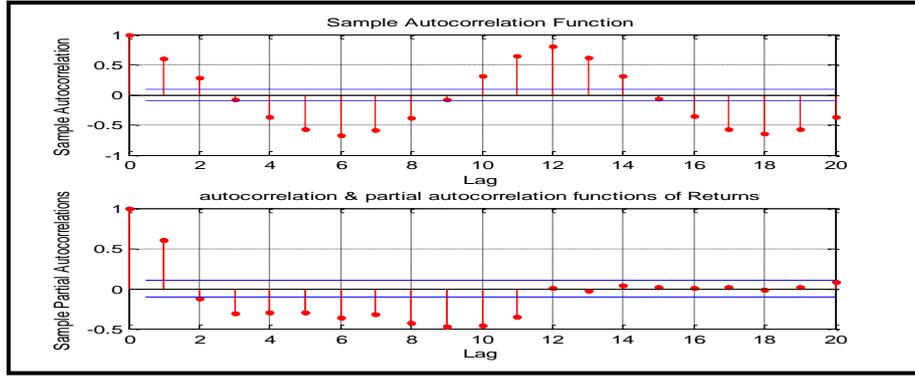
حيث $S = \sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{i=1}^q \beta_i < 1$. [1] و [3] و [4]

3- التطبيق

ان منهجية التطبيق باستخدام نماذج GARCH تتضمن اجراء بعض الفحوص التشخيصية للكشف عن وجود عدم تجانس التباين (Heteroscedasticity) وذلك عن طريق رسم مربعات متسلسلة

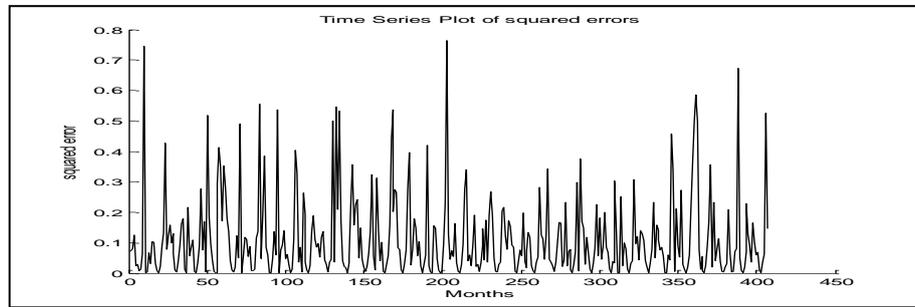
في اغلب الدراسات التطبيقية الخاصة بدراسة نماذج GARCH يتم تحويل البيانات الاصلية الى متسلسلة تسمى متسلسلة العوائد (Returns series) باستخدام التحويل $X_t = \text{Ln} \left[\frac{Y_t}{Y_{t-1}} \right]$ والذي يمثل التحويل اللوغارتمي مع الفرق الاول للحد من تأثير عدم ثبوت كل من الوسط والتباين وقد صمم هذا التحويل للتطبيقات

لكن المتسلسلة تبقى مترابطة وهذا ما يتضح عند رسم كل من ذاتي الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي لمتسلسلة العوائد في الشكل (3.1.3). حيث نلاحظ ان معاملات الارتباط في دالة الارتباط الذاتي

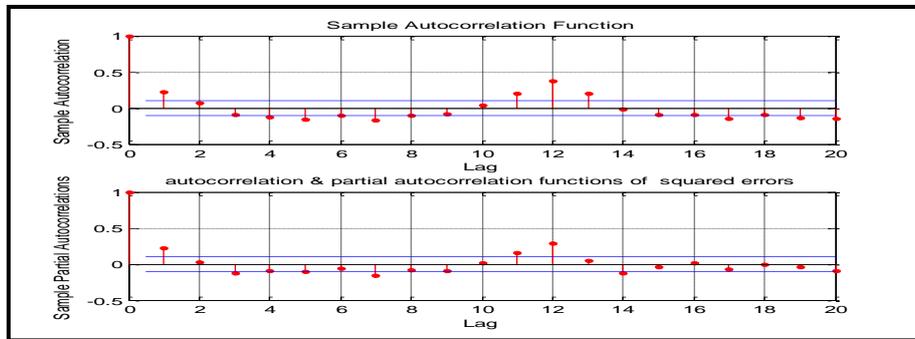


شكل (3.1.3): رسم كل من دالتي الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي لمتسلسلة العوائد

والشكل (3.1.4) يمثل رسم متسلسلة مربعات الاخطاء او البواقي حيث $\{e_t^2\}$ $e_t = X_t - \text{mean}(X_t)$ ونلاحظ وجود التطاير (Volatility) في البيانات. ومن رسم كل من دالتي الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي لمتسلسلة مربعات الاخطاء الشكل (3.1.5) يتضح وجود تأثير عدم تجانس التباين لمتسلسلة العوائد لوقوع عدد غير قليل من معاملات الارتباط الذاتي خارج فترة الثقة.



شكل (3.1.4): رسم المتسلسلة الزمنية لمربعات الاخطاء لمتسلسلة العوائد



شكل (3.1.5): رسم كل من دالتي الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي لمربعات اخطاء متسلسلة العوائد

3.2 اختبار Ljung-Box للكشف عن وجود تأثير عدم تجانس التباين المشروط (Heteroscedasticity) هنالك العديد من الاختبارات المستخدمة للكشف عن وجود عدم ثبات التباين المشروط ومن أشهرها وأكثرها استخداما هو اختبار (Ljung-Box) الذي يتضمن اختبار الفرضية الصفري H_0 ضد الفرضية البديلة H_1 حيث

$Q(m)$ تتوزع توزيع مربع كاي بدرجة حرية m وتحت مستوى معنوية مقبول α فان الفرضية H_0 ترفض اذا كانت $Q(m) > \chi^2_\alpha$. وفي البرمجيات فان رفض H_0 يعبر عنه بقيمة منطقية $h = 1$ وان القرار برفض H_0 اذا كانت p اقل او تساوي مستوى المعنوية α والذي غالبا ما ياخذ القيمة 0.05. والجداول (3.2.1) يبين قيم h و p للفروقات الزمنية العشرة الاولى والذي يعطي القرار برفض الفرضية الصفري H_0 مما يعني وجود ارتباطات غير صفري في متسلسلة مربعات البواقي وبالتالي وجود تأثير عدم تجانس التباين في متسلسلة العوائد.

و بحساب الإحصاء $Q(m) = T(T + 2) \cdot \sum_{l=1}^m \frac{\hat{\rho}_l^2}{T-l}$ حيث T هو حجم العينة و l يمثل الفرق الزمني (Lag) و $\hat{\rho}_l^2$ تمثل مربعات معاملات الارتباط الذاتي لمتسلسلة البواقي. ان الاحصاء

$$H_0: \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \dots = \rho_m$$

$$H_1: \rho_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

و بحساب الإحصاء $Q(m) = T(T + 2) \cdot \sum_{l=1}^m \frac{\hat{\rho}_l^2}{T-l}$ حيث T هو حجم العينة و l يمثل الفرق الزمني (Lag) و $\hat{\rho}_l^2$ تمثل مربعات معاملات الارتباط الذاتي لمتسلسلة البواقي. ان الاحصاء

جدول (3.2.1) : نتائج اختبار Ljung-Box لمتسلسلة العوائد

| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | $l(Lag)$ |
|--------|-------|--------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|-------|-------------------|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | h |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | p |
| 812.15 | 772.3 | 770.08 | 706.2 | 566.1 | 380.6 | 243.05 | 185.5 | 183.3 | 149.8 | Q |
| 18.31 | 16.92 | 15.51 | 14.07 | 12.59 | 11.07 | 9.49 | 7.81 | 5.99 | 3.84 | χ^2_{α} |

معنوية هذه المعلمة وان قيمة التباين غير المشروط لهذا النموذج $\sigma_X^2 = 0.1184$.

اما النماذج للمراتب الاخرى فقد كانت غير مستقرة لذا فهي لا تصلح للتنبؤ بالتباينات المشروطة بالإضافة الى ان التباين غير المشروط لها غير معرف.

3.4 : معياري AIC و BIC لتحديد النموذج الملائم. لغرض الحصول على افضل نموذج من بين النماذج الثلاثة الأتفة الذكر فقد تم احتساب قيم كل من معيار معلومات اكايكي AIC و معيار معلومات البيزي BIC والمعرفان بالشكل: $AIC = nLn(\hat{\sigma}_T^2) + PLn(n)$ حيث n يمثل حجم العينة و P يمثل عدد معلمات النموذج و $\hat{\sigma}_T^2$ هي القيمة التخمينية لدالة الامكان الاعظم وتمثل تباين بواقى النموذج [1].

والجدول (3.4.1) يبين قيم معياري AIC و BIC لكل نموذج ويتضح منه ان النموذج الافضل من بين النماذج الثلاثة هو نموذج $ARCH(1)$

جدول (3.4.1): قيم معياري AIC و BIC للنماذج الثلاثة

| النموذج | AIC | BIC |
|------------|----------|----------|
| GARCH(1,1) | 249.5862 | 261.6127 |
| ARCH(1) | 247.6476 | 255.6652 |
| ARCH(2) | 249.5445 | 261.5709 |

3.5 - التنبؤ بالتباينات المشروطة

تم استخدام البرنامج في الملحق I للحصول على تنبؤات للتباين المشروط لكل نموذج من النماذج الثلاثة و وباتني عشر خطوة تنبؤ وكانت نتائج التنبؤ تشير الى اقتراب قيم تنبؤات التباين المشروط لكل نموذج من التباين غير المشروط لذلك النموذج والجدول (3.5.1) يبين القيم المتنبأ بها لكل نموذج

الجدول (3.5.1): قيم تنبؤات التباين المشروط للنماذج الثلاثة

| خطوة التنبؤ k | GARCH(1,1) | ARCH(1) | ARCH(2) |
|---------------|------------|---------|---------|
| 1 | 0.1338 | 0.1293 | 0.1369 |
| 2 | 0.1249 | 0.1225 | 0.1264 |
| 3 | 0.1211 | 0.1197 | 0.1219 |
| 4 | 0.1194 | 0.1186 | 0.1200 |
| 5 | 0.1187 | 0.1181 | 0.1191 |
| 6 | 0.1184 | 0.1179 | 0.1187 |
| 7 | 0.1183 | 0.1179 | 0.1185 |
| 8 | 0.1182 | 0.1178 | 0.1184 |
| 9 | 0.1182 | 0.1178 | 0.1184 |
| 10 | 0.1182 | 0.1178 | 0.1184 |
| 11 | 0.1182 | 0.1178 | 0.1184 |
| 12 | 0.1182 | 0.1178 | 0.1184 |

3.3: تقدير معلمات نماذج GARCH

باستخدام البرنامج المرفق بالملحق 1 تم الحصول على تقديرات لمعلمات عدة نماذج $GARCH(q, p)$ ولمراتب مختلفة لـ p و q ولكن ليست كل النماذج مستقرة لذا سنستعرض ابرز ثلاثة نماذج مستقرة وكما يلي :

1- نموذج $GARCH(1,1)$

$$\sigma_t^2 = 0.0672012 + X_t = \sigma_t Z_t, \quad Z_t \sim iidN(0,1)$$

$$0.0255162\sigma_{t-1}^2 + 0.405804X_{t-1}^2$$

GARCH (1,1) Conditional Variance Model:

Conditional Probability Distribution: Gaussian

| Parameter | Value | Standard Error | t Statistic |
|-----------|-----------|----------------|-------------|
| Constant | 0.0672012 | 0.0188409 | 3.56678 |
| GARCH{1} | 0.0255161 | 0.142583 | 0.178956 |
| ARCH{1} | 0.405804 | 0.145851 | 2.78232 |

نلاحظ ان النموذج مستقر لان $\alpha_1 + \beta_1 = 0.4313202 < 1$ لكن احصاءة t للمعلمة β_1 اقل من 1.96 مما يشير الى ضعف في معنوية المعلمة β_1 وبالاعتماد على قيم $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$ فان قيمة التباين غير المشروط للنموذج $\sigma_X^2 = 0.1182$.

2- نموذج $ARCH(1)$

$$\sigma_t^2 = 0.070084 + X_t = \sigma_t Z_t, \quad Z_t \sim iidN(0,1)$$

$$0.405137X_{t-1}^2$$

GARCH(0,1) Conditional Variance Model:

Conditional Probability Distribution: Gaussian

| Parameter | Value | Standard Error | t Statistic |
|-----------|----------|----------------|-------------|
| Constant | 0.070084 | 0.00987914 | 7.09414 |
| ARCH{1} | 0.405137 | 0.145129 | 2.79157 |

ان النموذج مستقر لان $\alpha_1 = 0.405137 < 1$ وان احصاءة t للمعلمة اكبر من 1.96 مما يعطي معنوية لهذه المعلمة وان قيمة التباين غير المشروط لهذا النموذج $\sigma_X^2 = 0.1178$.

3 - نموذج $GARCH(2)$

$$\sigma_t^2 = 0.0682835 + X_t = \sigma_t Z_t, \quad Z_t \sim iidN(0,1)$$

$$0.405163X_{t-1}^2 + 0.0179029X_{t-2}^2$$

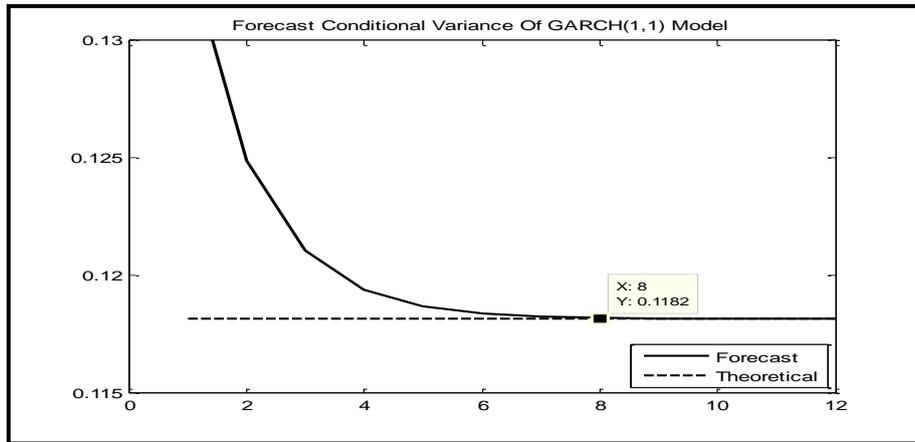
GARCH(0,2) Conditional Variance Model:

Conditional Probability Distribution: Gaussian

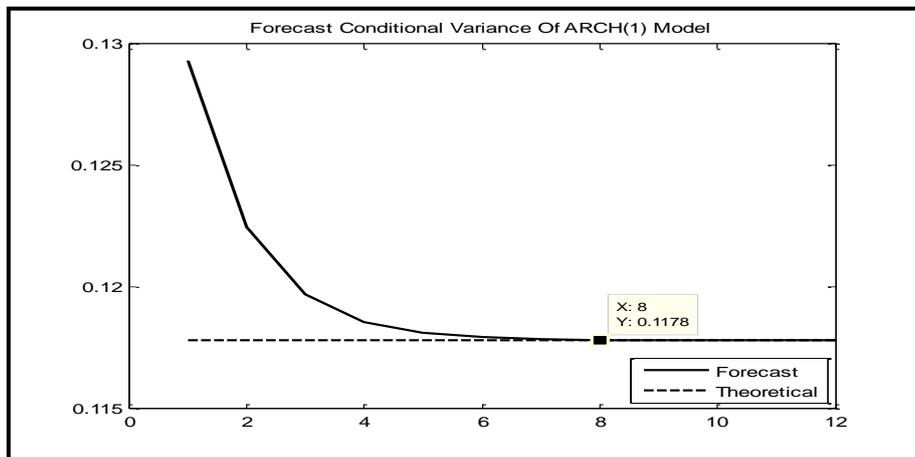
| Parameter | Value | Standard Error | t Statistic |
|-----------|-----------|----------------|-------------|
| Constant | 0.0682835 | 0.0118794 | 5.74805 |
| ARCH{1} | 0.405163 | 0.146141 | 2.77242 |
| ARCH{2} | 0.0179029 | 0.0607298 | 0.294796 |

ان النموذج مستقر لان $\alpha_1 + \alpha_2 = 0.4230659 < 1$ وان قيمة احصاءة t للمعلمة α_2 اقل من 1.96 والذي يعني ضعف في

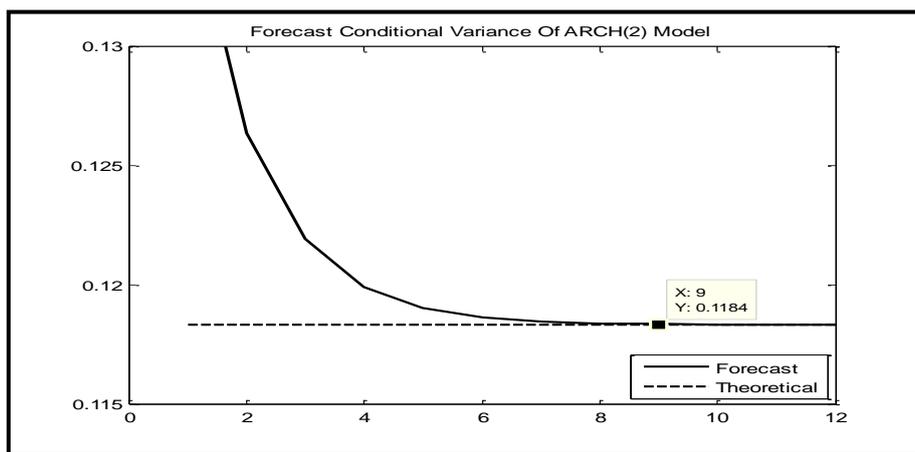
والاشكال (3.5.1) و (3.5.2) و (3.5.3) تبين اقتراب قيم تنبؤات التباين المشروط من قيم التباين غير المشروط للنماذج ARCH(2) و ARCH(1) و GARCH(1,1) على التوالي



الشكل (3.5.1): تنبؤات التباين المشروط لنموذج GARCH(1,1)



الشكل (3.5.2): تنبؤات التباين المشروط لنموذج ARCH(1)



الشكل (3.5.3): تنبؤات التباين المشروط لنموذج ARCH(2)

الملحق -1-

برنامج بنظام Matlab2012a لاحتساب كل النتائج الواردة في الجانب التطبيقي من البحث من بيانات و اختبارات و تخمين وتنبؤ ورسم الاشكال.

```
Data=[7.9;10.3;13.5;17.9;25.5;29.9;35.5;32.3;28.8;22.3;9.4;9.4;8.8;11.4;13.6;18.8;25.9;31.0;33.8;33.8;29.1;21.6;15.0;7.8;5.9;8.4;12.5;17.1;24.5;31.5;34.8;32.7;26.9;19.9;13.3;8.7;7.8;8.1;12.9;16.4;22.0;30.6;33.0;33.1;27.6;20.5;12.1;9.2;6.1;5.7;11.7;18.0;24.5;30.2;32.8;32.2;33.0;19.2;10.1;5.6;3.7;6.7;11.4;17.4;25.2;30.9;34.1;32.0;27.8;19.6;15.7;7.8;7.5;9.5;13.4;18.7;23.6;31.7;34.8;31.8;28.3;20.1;13.9;6.6;8.2;6.4;10.0;18.6;24.9;31.8;33.3;34.9;28.1;19.4;15.2;7.3;7.3;9.6;13.0;18.9;23.5;30.1;35.5;34.4;30.8;22.1;11.7;6.6;8.0;10.7;10.0;16.7;25.9;31.3;34.6;33.3;28.4;19.6;12.7;9.1;6.8;9.3;11.7;16.5;23.9;29.5;34.9;33.2;27.4;22.1;10.9;9.0;4.3;6.8;14.1;21.3;26.1;30.4;34.7;33.6;28.0;22.1;13.8;7.6;5.1;8.2;13.4;16.8;24.7;30.6;35.3;32.9;28.3;22.0;15.2;8.6;6.8;7.5;13.1;19.0;23.3;32.0;34.5;33.6;28.4;22.3;15.0;7.7;3.7;5.8;9.8;16.4;21.9;29.0;32.2;33.2;27.7;21.0;12.4;6.6;5.6;7.4;11.3;16.6;21.1;29.1;34.0;33.4;28.1;22.0;11.5;9.8;9.2;8.9;13.2;19.4;24.8;31.0;34.3;32.7;30.4;22.4;13.9;5.8;8.3;10.3;13.5;17.1;25.6;30.7;33.0;32.9;28.0;20.6;12.2;6.8;8.3;10.6;12.4;16.8;26.0;30.2;35.8;33.4;27.7;20.5;14.0;11.4;7.5;6.2;9.6;16.1;24.9;31.1;33.5;31.7;26.7;22.0;14.0;8.8;6.2;8.2;12.4;18.4;24.9;33.3;35.7;35.4;29.0;22.0;17.3;11.1;9.1;10.4;13.6;19.6;27.6;32.2;35.4;34.8;28.7;22.8;13.4;9.4;6.7;8.3;11.8;21.2;26.3;31.9;37.4;34.5;28.6;20.8;13.8;9.2;7.9;9.7;15.7;18.3;24.0;31.7;35.3;34.9;29.4;22.6;13.1;12.0;6.5;9.8;14.4;17.1;24.1;31.0;34.8;34.7;29.0;21.7;13.5;10.6;6.928;8.568;11.5;17.964;24.1;31.4;35.1;34.5;28.4;23.6;13.6;9.1;8.9;8.9;14.7;17.2;23.6;31.3;34.9;34.2;28.7;23.5;13.5;9.9;7.0;8.6;12.5;17.9;24.9;30.5;35.1;34.5;28.7;21.7;13.4;10.7;7.2;10.5;14.6;19.2;25.7;32.7;34.3;35.9;28.1;22.8;11.6;6.5;6.0;9.5;12.8;16.1;27.1;32.2;35.9;34.7;30.1;23.6;14.8;8.1;4.0;8.6;17.4;22.9;25.6;32.3;35.2;35.5;30.3;22.5;14.9;8.2;7.1;11.5;14.1;18.7;26.2;31.9;34.2;32.3;28;23.4;14.8;11.5;10.9;11.7;15.3;11.5;26.1;32.7;36;35.6;31;23.7;14.7;10.3;7.6;9.2;13.8;19;24.2;31.5;35.4;34.3;28.4;22.1;10.7;7.3];
```

figure(1)

hold on

xlabel('Months');ylabel('Temp in C');

title('Time Series Plot of Monthly Mean of Temperature In mosul city 1978-2011')

plot(Data,'k');

hold off

Y=price2ret(Data);

N=length(Y);

figure(2)

hold on

xlabel('Months');ylabel('Returns');

title('Time Series Plot of Returns')

plot(Y,'k');

hold off

e = Y - mean(Y);

a = e.^2;

figure(3)

hold on

xlabel('Months');ylabel('squared error');

title('Time Series Plot of squared errors')

plot(a,'k');

hold off

figure(4)

hold on

subplot(2,1,1)

autocorr(e.^2)

subplot(2,1,2)

parcorr(e.^2)

title('autocorrelation & partial autocorrelation functions of squared errors')

hold off

[h,p,Qstat,crit] = lbqtest(Y,'Lags',[1:10])

P = 0; % Model order P (P = length of Alpha).

Q = 2; % Model order Q (Q = length of Beta).

model=garch(P,Q);

[fit,VarCov,LogL,info] = estimate(model,Y);

[AIC,BIC] = aicbic(LogL,1+P+Q,N)

% Forecast the conditional variance using the estimated

%coefficients.

```
V = forecast(fit,12,'Y0',Y);  
disp(V)  
sig2 = fit.Constant/(1-fit.ARCH{1}-fit.ARCH{2});  
figure(5)  
plot(V,'k','LineWidth',2)  
hold on  
plot(ones(12,1)*sig2,'k-','LineWidth',1.5)  
xlim([0,12]);ylim([0.115 0.13])  
title('Forecast Conditional Variance Of ARCH(2) Model')  
legend('Forecast','Theoretical','Location','SouthEast')  
hold off
```

المصادر

1. Francg, C. , (2010), "GARCH Models: Structure ,Statistical Inference and Financial Application " , John Wiley and Sons, Ltd, Publication.
2. Var der vart, A.W., (1995), "Time Series " , Vrije University, Amsterdam.
3. Ruey S. Tasy, (2005), "Analysis of Financial Time Series", 2nd edition , WILEY INTERSCIENCE, A John Wiley and Sons, INC. , Publication.
4. Helmut Lütkepoh and Markus Karätzig, (2006), "Applied Time Series Econometrice", Cambridge University Press.
5. كروش. صلاح الدين, (2007), " التوقع المبيعات باستخدام نماذج احصائية : دراسة تطبيقية بشركة الاسمنت حامة بوزيان (SCHB) , رسالة ماجستير منشورة , كلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير , جامعة منتوري, قسنطينة , الجزائر
6. Edward, N. , (2011), " Modeling and Forecasting using Time Series GARCH Models :An Application of Tanzania Inflation Rate Date " , M.se Dissertation, University of Dares Salaam.
7. Ozaki, T., (1985), "Nonlinear Time Series Model and Dynamical Systems", Handbook of Statics, Vol.5 (Ed. Hannan, E.J. and Krishnailah, P.R. and Rao, M.M.), Elsevier Science Publishers B.V., PP(25-83).
8. الحيايي, ازهر عباس والعبيدي, عبدالغفور جاسم, (2007), "استقرارية نموذج الانحدار الذاتي اللوجستي" مجلة جامعة قطر للعلوم, جامعة قطر, المجلد (27), الصفحات (17-28).
9. الدهمشي, هبة هاني, (2008), " دراسة شروط استقرارية النموذج الاسي ذي الانتقال الأملس للانحدار الذاتي مع التطبيق", رسالة ماجستير غير منشورة , كلية التربية , جامعة تكريت .
10. PEI YIN, (2007), "Volatility Estimation And Price Prediction Using A Hidden Markov Model With Empirical Study", PhD Dissertation, The Faculty of The Graduate School, University of Missouri, Columbia, U.S.A.
11. Evd aokia, X. and Stavros, D.,(2010),"ARCH Models For Financial Applications", John Wiley Sons, Ltd, Publication
12. العبيدي, عبد الغفور جاسم و الحيايي, أزهر عباس , (1996), " تحليل ونمذجة السلسلة الزمنية للمعدلات السنوية لدرجات الحرارة في مدينة الموصل " , مجلة علوم الرافدين , المجلد(7), العدد(1) ,الصفحات(37-48) , جامعة الموصل.

A Study On Stability Of Conditional Variances For GARCH Models With Application

Azher Abbas Mohammad , Mayadah Khalil Ghaffar

Department of Mathematics, College of Education for Pure Science , University of Tikrit , Tikrit , Iraq

Abstract

In this paper we study the stability conditions of GARCH models and we find these conditions by using a local linearization technique. In addition we study the stability of conditional variances predictions where these predictions converge to an unconditional variance of the model after finite number of prediction steps. We apply this study to a time series represent the monthly mean temperature in Mosul city for years 1978-2011 and we find that ARCH (1) model is the fit model for prediction.