تقنيات في القذف المتعدد المختلط لحل مسائل القيم الابتدائية الصلبة

خالد علي محمد خلف[1] ، بشير محمد صالح خلف[2]

[1] قسم الرياضيات ، كلية التربية للعلوم الصرفة ، جامعة الموصل ، الموصل ، العراق

[2] قسم علوم الحاسبات ، كلية التربية للعلوم الصرفة ، جامعة الموصل ، الموصل ، العراق

الملخص

الهدف من البحث هو تطوير عدد من التقنيات في موضوع القذف المتعدد لحل مسائل القيم الابتدائية الصلبة، وهذه التقنيات تزيد من دقة الحلول العددية للمسائل الصلبة وكذلك تقلل من تراكم الأخطاء، بالإضافة الى تقليل المعادلات الجبرية للوصول الى الحل. وتم استخدام أسلوب القذف المتعدد المختلط في تطوير هذه التقنيات.

المقدمة

ظهرت المسائل الصلبة منذ نصف قرن مضى، ومرّت عليها بضع سنين من الإهمال حتى قال العالم (G.Dahlquist) في حوالي (1960) أصبح كل واحد مدركاً أن العالم مليء بالمسائل الصلبة.

إستخدمت مسائل القيم الابتدائية عند دراسة حركة النوابض ذات الصلابة المختلفة ومنها إشتقت المسألة إسمها. وكان أول ظهور لمصطلح الصلابة في بحث لـ (Gurtis & Hirschfelder) 1952 في مسألة في علم الكيمياء الحركية. إذ قاما باقتراح أول مجموعة من صيغ التكاملات العددية الملائمة لمسائل القيم الابتدائية الصلبة[8].

المعادلة التفاضلية الصلبة Stiff Differential Equation

هي المعادلة التفاضلية التي لها حل بالصيغة الاسية $e^{\lambda_i x}$ إذ λ_i تمتلك قيماً مختلفة، واصغر قيمة لـ λ_i عبارة عن عدد سالب كبير وهذ الحل يقترب من الصفر مع زيادة قيمة (x) [4].

وبتعبير آخر، هي المعادلة التي لها حلاً مضبوطاً من الصيغة (e^{-cx}) حيث أن (c) ثابت موجب ذو قيمة كبيرة، وهو عادةً جزء من الحل ويدعى بـ (الحل العابر)(Transient Solution).

ويدعى الجزء الأهم من الحل بـ (الحل المستقر)(steady-state solution)، الحل العابر للمعادلة الصلبة يقترب من الصفر كلما تزايدت قيمة (x) [3] .

إن الفكرة العامة للمسائل الصلبة انها مسائل تحتوي على حلول مستقرة و حلول عابرة وأن جميع هذه الحلول تصل الى حل مستقر واحد بعد خطوات قليلة. فإذا استخدمت الطرائق الصريحة لحل مثل هذه الأنظمة فيتم التحكم بطول خطوة التكامل من خلال الحل العابر[4].

شاع استخدام الطرق الضمنية لحل المسائل الصلبة بسبب إستقراريتها العالية. كذلك فإن الطرائق الصريحة عادةً تكون غير فعالة مع المسائل الصلبة إلا أن الكثير من البحوث قدمت مؤخراً العديد من الطرائق الصريحة المطورة لكي تتعامل مع المسائل الصلبة [6].

المسألة الصلبة Stiff Problems

المسألة الصلبة هي المسألة التي يكون حلها مكون من عدة حدود، قسم من هذه الحدود يتغير ببطؤ والقسم الآخر من هذه الحدود تقترب من الصفر بسرعة ولكنها لا تساوي صفراً ابداً. مثال على هذا النوع من المسائل: $y' = -\lambda e^{-\lambda x} - \frac{1}{(1+x^2)^2} \quad , \ \lambda > 0$

الحل المضبوط لهذه المعادلة هو : $y = e^{-\lambda x} + \frac{1}{(1+x)}$

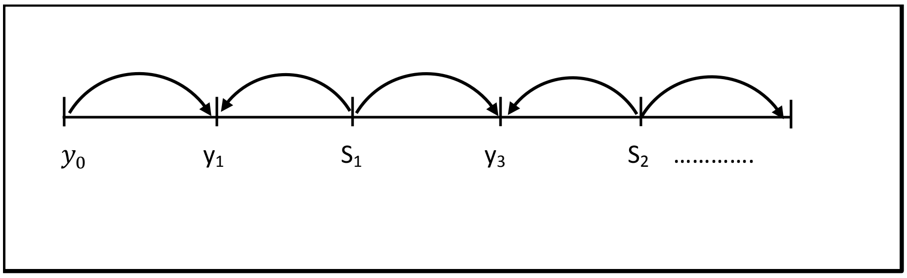
الحد الأول $e^{-\lambda x} \to 0$ ولكن لا يساوي صفراً ابداً، أي حتى بعد $\left(e^{-1000} = \frac{1}{e^{1000}}\right)$ وهذا المقدار لا يساوي صفر إلا أنه عند استخدام الحاسوب وتطبيق الخوارزميات العددية لحل مثل هذه المسائل فإن هذا الحل يحتسب صفر وفي هذه الحالة يكون قد دخل خطأ الى الحل و نفرضه (ϵ). أما الحد $\left(\frac{1}{1+x}\right)$ فإنه يتغير ببطؤ شديد في النقطة التي تعتبر عندها الحاسبة أن $(e^{-\lambda x})$ تساوي صفر يبدأ دخول الخطأ في الحل التقريبي فإذا كان $(1+\lambda h) > 1$ فإن $(1+\lambda h)^{n+1} \to \infty$ أي أن الخطأ ينمو بصورة لا يمكن السيطرة عليه ولهذا تكون المسألة صلبة.

تقنيات القذف المتعدد المختلط Techniques of Mixed Multi-Shooting

تم في هذا البند عرض ثلاث تقنيات لأسلوب القذف المتعدد المختلط وتم تطبيق هذه التقنيات على معادلات تفاضلية إعتيادية وكذلك تم تطبيق التقنيات على مسائل قيم إبتدائية صلبة وتم ايضاً مقارنة نتائج كل تقنية مع الحل المضبوط للمسألة المختارة في الحل.

التقنية الأولى

أسلوب هذه التقنية موضح بالشكل التالي



1- تكامل امامي باستخدام طريقة اويلر الاعتيادية.

2- تكامل خلفي باستخدام طريقة اويلر الخلفية.

3- مساواة التكامل الامامي بالتكامل الخلفي.

في هذه التقنية يكون عدد المعادلات الجبرية $(\frac{n}{2})$ إذ n تمثل عدد خطوات التكامل) إذ يتم حل معادلة جبرية واحدة بمتغير واحد في كل خطوتين من خطوات التكامل في حالة حل معادلة تفاضلية واحدة من الرتبة الاولى بمتغير واحد وحل معادلتين جبريتين بمتغيرين في كل خطوتين من خطوات التكامل في حالة حل معادلة تفاضلية واحدة من الرتبة الثانية بمتغير واحد وهكذا.

$$y'' + 1001y' + 1000y = 0 \qquad (1)$$
$$y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = -1$$

الحل:

نحول المعادلة التفاضلية ذات الرتبة الثانية الى نظام من معادلتين من الرتبة الأولى إذ:

$$\left.\begin{aligned} y' &= f(x,y,z) = z \quad , y(0) = 1 \\ z' &= g(x,y,z) = -1001z - 1000y \quad , z(0) = -1 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

نحل النظام (2) بطريقة اويلر الاعتيادية وبخطوة $h = 0.01$

$$y_1 = y_0 + hf_0 \Rightarrow y_1 = 1 + 0.01(-1) = 0.99$$
$$z_1 = z_0 + hg_0 \Rightarrow z_1 = -1 + 0.01(-1001(-1) - 1000(1)) = -0.99$$

تكامل خلفي باستخدام صيغة اويلر الخلفية إذ

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$$
$$z_{n+1} = z_n + hg(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$$
$$z_2 = z_1 + \quad y_2 = y_1 + hz_2 \ , \quad y_1 = 0.99$$
$$h(-1001z_2 - 1000y_2) \ , \quad z_1 = -0.99$$

نفرض أن

$$y_2 = S \quad , z_2 = R$$
$$S = y_1 + hR$$
$$y_1 = S - hR \ ....(1)$$
$$R = z_1 + h(-1001R - 1000S)$$
$$z_1 = R + 1001hR + 1000hS \ ....(2)$$

بضرب المعادلة (1) بـ $(-1000h)$ تصبح كالاتي:

$$-1000hy_1 = -1000hS + 1000h^2R \ ....(1)$$

بجمع المعادلتين (1) و (2) نحصل على

$$-1000hy_1 + z_1 = R(1 + 1001h + 1000h^2)$$
$$R = \frac{-1000hy_1 + z_1}{1 + 1001h + 1000h^2}$$

نعوض قيمة R في المعادلة (1) نحصل على

$$S = y_1 + h\left(\frac{-1000hy_1 + z_1}{1 + 1001h + 1000h^2}\right) S$$

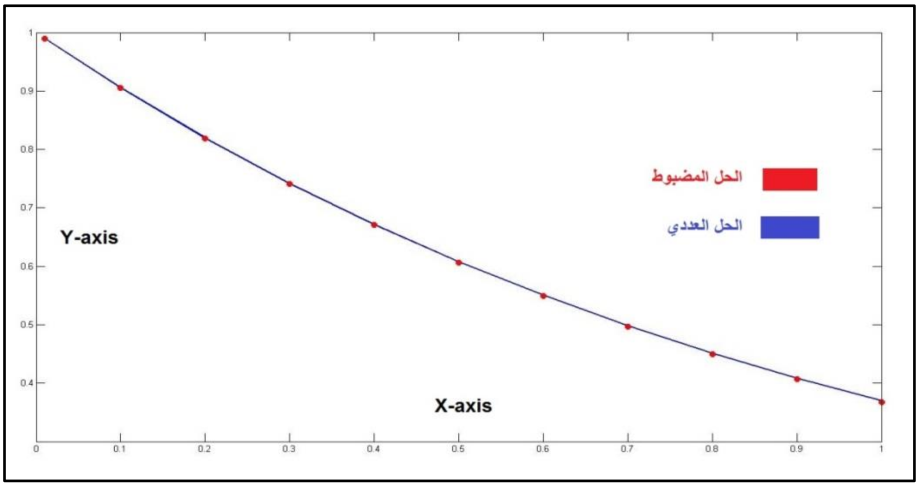
نعوض قيم y_1, z_1, h لنحصل على قيمتي S, R إذ

$R = -0.980198019801980 \quad , \quad S = 0.980198019801980$

هاتان القيمتان (S, R) محسوبتان عند قيمة $(x = 0.02)$ إذ يمثلان الخطوة الثانية للتكامل.

جدول (1) نتائج التقنية الأولى الناتجة من ربط طريقة اويلر الضمنية مع طريقة اويلر الاعتيادية ومقارنتها بالحل المضبوط للمسألة (1)

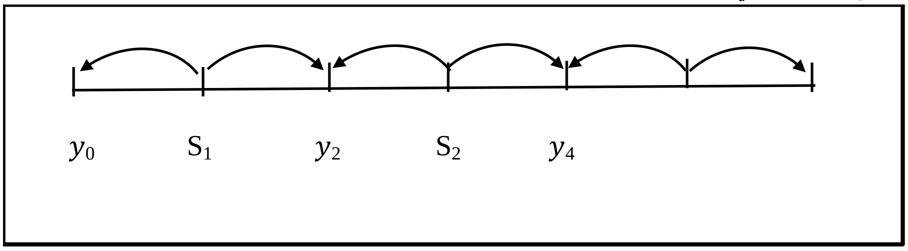
القيم	الحل العددي		الحل المضبوط		الخطأ	
X	Y	Z	T_1	T_2	E_1	E_2
10.0	90000.9	9000-0.9	90040.9	9004-0.9	6 E-9.4	6 E-9.4-
0.1	0.90483	-0.90483	0.90483	-0.90483	73.01 E-	73.01 E--
0.2	0.81872	-0.81872	0.81873	-0.81873	75.46 E-	7-5.46 E-
0.3	0.74081	-0.74081	0.74081	-0.74081	77.41 E-	7-7.41 E-
0.4	0.67031	-0.67031	0.67032	-0.67032	78.94 E-	7-8.94 E-
0.5	0.60652	-0.60652	0.60653	-0.60653	61.01 E-	6-1.01 E-
0.6	0.54880	-0.54880	0.54881	-0.54881	61.09 E-	6-1.09 E-
0.7	0.49657	-0.49657	0.49658	-0.49658	61.16 E-	6-1.16 E-
0.8	0.44931	-0.44931	0.44932	-0.44932	61.19 E-	6-1.19 E-
0.9	0.40655	-0.40655	0.40656	-0.40656	61.21 E-	6-1.21 E-
1.0	0.36786	-0.36786	0.36787	-0.36787	61.22 E-	6-1.22 E-



شكل (1). مقارنة بين الحل المضبوط و الحل بالتقنية الأولى الناتجة من ربط طريقة اويلر الضمنية مع طريقة اويلر الاعتيادية للمسألة (1)

التقنية الثانية

أسلوب هذه التقنية موضح بالشكل التالي



1- تكامل خلفي باستخدام طريقة اويلر الخلفية.

2- تكامل امامي باستخدام طريقة اويلر الامامية.

3- تكامل خلفي باستخدام طريقة اويلر الخلفية ثم مساواة التكامل الخلفي بالتكامل الامامي وحل المعادلة الجبرية الناتجة.

في هذه التقنية يكون عدد المعادلات الجبرية ($\frac{n}{2}$) إذ يتم حل معادلة جبرية واحدة بمتغير واحد في كل خطوتين من خطوات التكامل في حالة حل معادلة تفاضلية واحدة من الرتبة الاولى بمتغير واحد وحل معادلتين جبريتين بمتغيرين في كل خطوتين من خطوات التكامل في حالة حل معادلة تفاضلية واحدة من الرتبة الثانية بمتغير واحد وهكذا.

مثال: نحل المسألة (1) باستخدام التقنية الثانية

$$y' = f(x,y,z) = z \quad , \quad y(0) = 1$$
$$z' = g(x,y,z) = -1001z - 1000y \quad , \quad z(0) = -1$$

حسب طريقة اويلر الخلفية

$$y_n = y_{n+1} - hf(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$$
$$y_0 = y_1 - hf(x_1, y_1, z_1)$$
$$z_n = z_{n+1} - hg(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$$
$$z_0 = z_1 - hg(x_1, y_1, z_1)$$

نفرض أن

$$y_1 = S \quad , \quad z_1 = R$$
$$y_0 = S - hR \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
$$z_0 = R + 1001hR + 1000hS \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

نضرب المعادلة (1) بـ ($-1000h$) ثم بجمع المعادلة الناتجة مع المعادلة (2) نحصل على

$$-1000hy_0 + z_0 = R(1 + 1001h + 1000h^2)$$
$$\Longrightarrow R = \frac{-1000hy_0 + z_0}{1 + 1001h + 1000h^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

ومن معادلة (1) نحصل على قيمة S إذ

$$S = y_0 + h\left(\frac{-1000hy_0 + z_0}{1 + 1001h + 1000h^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

بتعويض قيمتي y_0 و z_0 في المعادلتين (3) و (4) نحصل على قيمتي S و R إذ

$S = 0.990099009900990$, $R = -0.990099009900990$

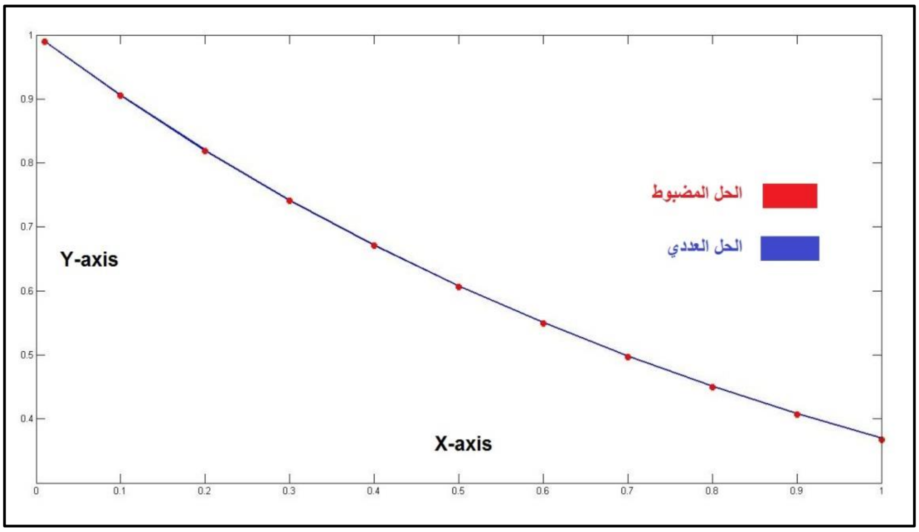
ثم نحسب y_2 و z_2 بطريقة اويلر الاعتيادية مستخدمين قيمتي S و R كقيم إبتدائية، إذ

$$y_2 = 0.98019801 \quad , \quad z_2 = -0.98019801$$

قيمتا (S, R) محسوبتان عند $(x = 0.01)$ وقيمتا (y_2, z_2) محسوبتان عند $(x = 0.02)$

جدول (2) نتائج التقنية الثانية الناتجة من ربط طريقة اويلر الضمنية مع طريقة اويلر الاعتيادية ومقارنتها بالحل المضبوط للمسألة (1)

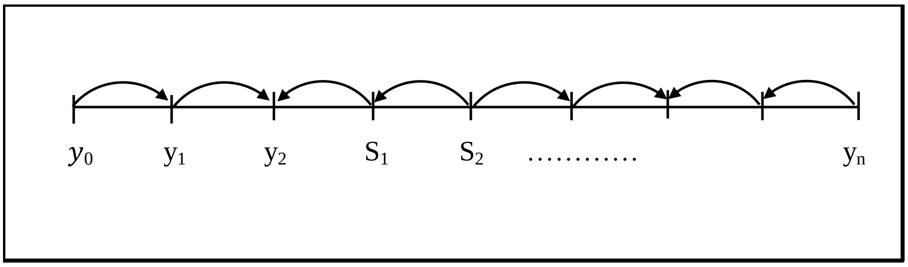
القيم	الحل العددي		الحل المضبوط		الخطأ	
X	Y	Z	T_1	T_2	E_1	E_2
0.01	0.99009	0.99009-	0.99004	0.99004-	E-64.91	E-64.91-
10.	0.90483	-0.90483	0.90483	-0.90483	01 E-7.3	01 E-7.-3
20.	0.81872	- 0.81872	0.81873	- 0.81873	7E-5.47	7 E-5.47-
30.	0.74081	-0.74081	0.74081	-0.74081	7E-7.40	7 E-7.40-
40.	0.67031	-0.67031	0.67032	2-0.6703	7E-8.93	7 E-8.93-
50.	0.60652	-0.60652	0.60653	-0.60653	E-61.01	E-61.01-
60.	0.54880	-0.54880	10.5488	1-0.5488	E-61.09	E-61.09-
70.	0.49657	-0.49657	80.4965	8-0.4965	E-61.15	E-61.15-
80.	0.44931	-0.44931	20.4493	2-0.4493	E-61.19	E-61.19-
90.	0.40655	-0.40655	0.40656	-0.40656	6E-1.21	6 E-1.21-
1.0	0.36786	-0.36786	70.3678	7-0.3678	6E-1.22	6 E-1.22-



شكل (2). مقارنة بين الحل المضبوط و الحل بالتقنية الثانية الناتجة من ربط طريقة اويلر الضمنية مع طريقة اويلر الاعتيادية للمسألة (1)

التقنية الثالثة

أسلوب هذه التقنية موضح بالشكل التالي:



1- تكامل امامي لخطوتين باستخدام طريقة اويلر الاعتيادية.

2- تكامل خلفي لخطوتين باستخدام طريقة اويلر الخلفية.

3- نساوي التكامل الامامي بالتكامل الخلفي ثم نحل المعادلة الجبرية لإيجاد قيمة (S).

في هذه التقنية يكون عدد المعادلات الجبرية المحلولة $(\frac{n}{4})$ إذ يتم حل معادلة جبرية واحدة بمتغير واحد كل اربع خطوات تكامل في حالة حل معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى بمتغير واحد وحل معادلتين جبريتين بمتغيرين كل اربع خطوات تكامل في حالة حل معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية بمتغير واحد وهكذا.

مثال:- نحل المسألة (1) باستخدام التقنية الثالثة

$$y' = f(x,y,z) = z \quad , \quad y(0) = 1$$
$$z' = g(x,y,z) = -1001z - 1000y \quad , \quad z(0) = -1$$

نحل النظام باستخدام طريقة اويلر الامامية وبخطوة مقدارها

إذ $h = 0.01$

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0, z_0)$$
$$y_1 = 1 + 0.01(-1) = 0.99$$
$$z_1 = z_0 + hg(x_0, y_0, z_0)$$
$$z_1 = -1 + 0.01(-1001(-1) - 1000(1)) = -0.99$$

نحسب y_2 و z_2 بنفس الطريقة إذ

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1, z_1)$$
$$y_2 = 0.99 + 0.01(-0.99) = 0.9801$$
$$z_2 = z_1 + hg(x_1, y_1, z_1)$$
$$z_2 = -0.99 + 0.01(-1001(-0.99) - 1000(0.99) = -0.9801$$

نفرض أن

$$y_4 = S \quad , \quad z_4 = R$$

حسب طريقة اويلر الخلفية

$$y_n = y_{n+1} - hf(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$$
$$y_3 = y_4 - hf(x_4, y_4, z_4)$$
$$y_3 = S - hR \quad ....(1)$$
$$z_n = z_{n+1} - hg(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$$
$$z_3 = z_4 - hg(x_4, y_4, z_4)$$
$$z_3 = R - h(-1001R - 1000S)$$
$$z_3 = R + 1001hR + 1000hS \quad ....(2)$$

وبنفس الطريقة نجد y_2 و z_2 إذ

$$y_2 = y_3 - hf(x_3, y_3, z_3)$$
$$y_2 = S - hR - h(R + 1001hR + 1000hS)$$
$$y_2 = S - hR - hR - 1001h^2R - 1000h^2S \;.... \; (3)$$
$$z_2 = z_3 - hg(x_3, y_3, z_3)$$
$$z_2 = R + 1001hR + 1000hS - h[-1001(R + 1001hR + 1000hS) - 1000(S - hR)]$$

$$z_2 = R + 1001hR + 1000hS + 1001hR + 1002001h^2R + 1001000h^2S + 1000hS - 1000h^2R \;.... (4)$$

من معادلة (3)

$$y_2 = (1 - 1000h^2)S - (2h + 1001h^2)R \;..... \quad (5)$$

من معادلة (4)

$$Z_2 = (2000h + 1001000h^2)S + (1 + 2002h + 1001001h^2)R \;......(6)$$

نضرب المعادلة (5) بـ $(-2000h - 1001000h^2)$

ونضرب المعادلة (6) بـ $(1 - 1000h^2)$

وبجمع المعادلتين الناتجتين نحصل على

$$-(2000h + 1001000h^2)y_2 + (1 - 1000h^2)z_2 = +(1 - [(2000h + 1001000h^2)(2h + 1001h^2) 1000h^2)(1 + 2001h + 1001001h^2)]\, R$$
$$\Longrightarrow -(2000h + 1001000h^2)y_2 + (1 - 1000h^2)z_2 = (1 + 2002h + 1004001h^2 + 2002000h^3 + 1000000h^4)R$$
$$\Longrightarrow R = \frac{-(2000h+1001000h^2)y_2+(1-1000h^2)z_2}{(1+2002h+1004001h^2+2002000h^3+1000000h^4)}$$

من معادلة (5) نحصل على قيمة S إذ

$$S = \frac{y_2+2hR+1001h^2R}{(1-1000h^2)}$$

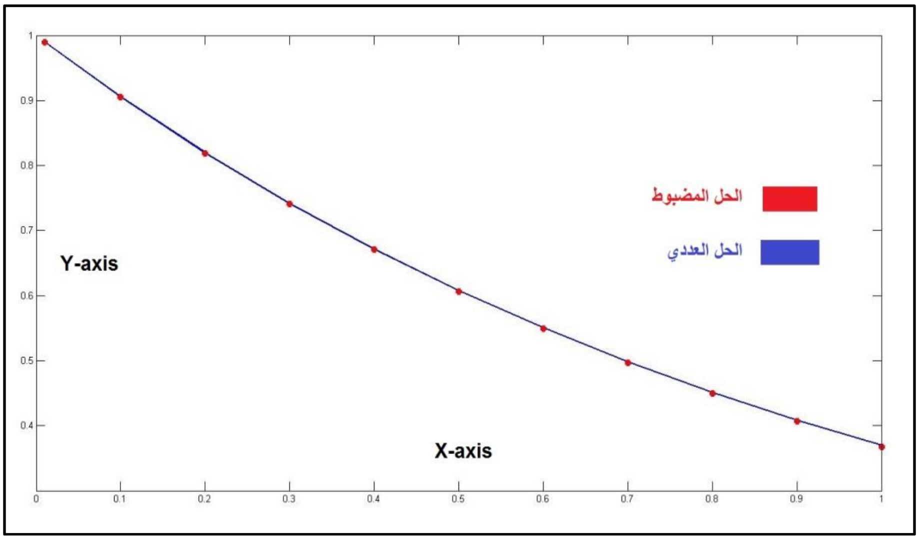
بتعويض قيم y_2 و z_2 المحسوبتان من التكامل الامامي لنحصل على قيمتي S و R إذ

$R = -0.960788158023723$, $S = 0.960788158023723$

قيمتا (S, R) محسوبتان عند $(x = 0.04)$

جدول (3) نتائج التقنية الثالثة الناتجة من ربط طريقة اويلر الخلفية مع طريقة اويلر الاعتيادية ومقارنتها بالحل المضبوط للمسألة (1)

القيم	الحل العددي		الحل المضبوط		الخطأ	
X	Y	Z	T_1	T_2	E_1	E_2
0.01	0.99000	-0.99000	0.99004	0.99004-	6 E-4.98	6 E-4.98-
0.1	0.90474	-0.90474	0.90483	-0.90483	634 E-9.	634 E-9.-
0.2	0.81872	-0.81872	0.81873	-0.81873	5.45 E-7	-5.45 E-7
0.3	0.74073	-0.74073	0.74081	-0.74081	8.14 E-6	-8.14 E-6
0.4	0.67031	-0.67031	0.67032	-0.67032	8.93 E-7	-8.93 E-7
0.5	0.60645	-0.60645	0.60653	-0.60653	7.07 E-6	-7.07 E-6
0.6	0.54880	-0.54880	0.54881	-0.54881	1.09 E-6	-1.09 E-6
0.7	0.49652	-0.49652	0.49658	-0.49658	6.12 E-6	-6.12 E-6
0.8	0.44931	-0.44931	0.44932	-0.44932	1.19 E-6	-1.19 E-6
0.9	0.40651	-0.40651	0.40656	-0.40656	5.28 E-6	-5.28 E-6
1.0	0.36786	-0.36786	0.36787	-0.36787	1.22 E-6	-1.22 E-6



شكل (3). مقارنة الحل المضبوط مع الحل بالتقنية الثالثة الناتجة من ربط طريقة اويلر الضمنية مع طريقة اويلر الاعتيادية للمسألة (1)

الاستنتاجات

إن اهم ما تناوله البحث تطوير عدد من التقنيات في موضوع القذف المتعدد لحل مسائل القيم الإبتدائية الصلبة في المعادلات التفاضلية الإعتيادية، وقد جاءت هذه التقنيات بنتائج دقيقة و أخطاء قليلة. واستخدمت في البحث تقنية ربط طريقة اويلر الاعتيادية مع طريقة اويلر الضمنية وجاءت هذه التقنية بنتائج ممتازة. ومن خلال مقارنة النتائج التي عرضت في البحث يتبين أن التقنيات الثلاث التي استخدمت في البحث قد جاءت بنتائج ممتازة جداً وذلك لأن الخطأ لن ينمو بسبب الأسلوب المتبع في كل تقنية من هذه التقنيات الثلاث. وتم في كل تقنية من التقنيات السابقة مقارنة النتائج المستحصلة من كل تقنية مع الحل المضبوط للمسألة المختارة في الحل.

المصادر

[1] الياس، سهيل ياسين طه " التكامل الرجعي لتحسين الحلول العددية للمعادلات التفاضلية الاعتيادية الصلبة"،رسالة ماجستير، جامعة الموصل، (2014).

[2] خلف، بشير محمد صالح و التمر، صهيب عبد الجبار " طريقة التطابق مع القذف المتعدد لحل المسائل الإبتدائية الخطية الصلبة"، جامعة الموصل، مجلة الرافدين لعلوم الحاسبات والرياضيات، المجلد(2) العدد(1)، (2005).

[3] Burden, R. L. and Faires, J. D. " Numerical Analysis ", 9th Ed. By Brooks/Cole, (2011).

[4] Cash, J. R. " Efficient numerical methods for the solution of stiff initial-value Problems and differential algebraic equations", (http://rspa.royalsocietypublishing.org), (2003).

[5] Chapra, Steven C. and Canale, Raymond P. " Numerical Methods for Engineers " 7th Ed. by McGraw-Hill, (2013).

[6] El-Zahar, Essam R. " A Non-Linear absolutely-stable explicit Numerical Integration Algorithm for stiff initial value problems ", American Journal Of Applied Sciences 10 (11): 1363-1370, (2013)

[7] Kushnir, Dan and Rokhlin, Vladimir " A Highly Accurate Solver for Stiff Ordinary Differential Equations ", Yale University, (2011).

[8] Murshed, A. A. A. "An investigation of Numerical Algorithms for solving stiff ODEs suitable for parallel computers", Ph. D. Thesis, University of Mosul, (2000).

[9] Omale, P. B. and Ojih, M. O. " Mathematical Analysis of Stiff and Non-Stiff initial Value Problems of Ordinary Differential Equation Using Matlab ",International Journal of Scientific & Engineering Research, Volume (5), Issue (9), September (2014).

[10] Suli, Endre and Mayers, David F. "An introduction to numerical analysis", University of oxford, (2003).

[11] Yang, W. Y. and Cao W. and Chung T. and Morris J. " Applied Numerical Methods using MATLAB " John Wiley & Sons, INC., Publications, (2005).

Techniques for Mixed Multiple Shooting for solve Stiff Initial Value Problems

Khalid A. M. Khalaf [1] , **Bashir M. S. Khalaf** [2]
[1] *Dept. of Mathematics , College of Edu. for pure Sciences , University of Mosul , Mosul , Iraq*
[2] *Dept. of Sciences of Computers , College of Edu. for pure Sciences , University of Mosul , Mosul , Iraq*

Abstract
The object of the research is to develop a number of techniques on the subject of multiple shooting for solving stiff initial value problems, and these techniques increase the accuracy of numerical solutions of stiff problems, as well as reduce the accumulation of errors, In addition to reducing the algebraic equations to get to the solution. We used mixed-multiple shooting in the development of these techniques.